

Математика пәні бойынша  
Республикалық оқушылар олимпиадасының  
екінші (аудандық) кезеңі (2022-2023 оқу жылы)

9-сынып

*Жұмыс уақыты: 2 сағат 30 минут.*

*Әр есеп 7 ұпайға бағаланады.*

1. Екі математик пен он экономисттерден сегіз адамнан тұратын комиссия құру керек. Егер комиссияның ішіне кем дегенде бір математик кіру керек болса, онда оны қанша әдіспен құруға болады?

2.  $ABC$  үшбұрышында  $AK$  биссектрисасы жүргізілген.  $AB$  және  $AC$  түзулерінен сәйкесінше  $E$  және  $D$  ( $E \neq A, D \neq A$ ) нүктелері алынған.  $E$  және  $D$  нүктелері  $BC$  түзуіне қатысты бір жақта жатыр және  $EB = BK, CD = CK$ . Егер  $EBCD$  төртбұрышының диагональдарының қиылысу нүктесі  $AK$  түзуінің бойында жатса, онда  $AB = AC$  болатынын дәлелдеңіз.

3.

$$a + (b, c) = b + (c, a) = c + (a, b)$$

болатындай барлық натурал  $a, b, c$  табыңыз.

Бұл жердегі  $(x, y)$  —  $x$  және  $y$  сандарының ең үлкен ортақ бөлгіші.

4.  $n$  бүтін саннан тұратын жиын берілген. «Секіріс» деп біз келесі операцияны айтамыз: жиыннан  $k$  сан тандалып және әр тандалған  $a$  санына  $b \cdot k$  санын қосуға болады, бұл жердегі  $b$  кез келген бүтін сан (әр  $a$  үшін өзінің  $b$  саны тандалынады). 3 «секіріс» жасап жиындағы барлық санды нөлге айналдыруға болатынын дәлелдеңіз.

Второй (районный) этап  
Республиканской олимпиады школьников  
по математике (2022-2023 учебный год)

9 класс

*Время работы: 2 часа 30 минут.*

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

1. Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию из восьми человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в неё должен входить хотя бы один математик?

2. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AK$ . На прямой  $AB$  и  $AC$  выбраны точки  $E, D$  ( $E \neq A, D \neq A$ ) соответственно. Оказалось, что точки  $E, D$  лежат по одну сторону от прямой  $BC$  и  $EB = BK, CD = CK$ . Докажите, что если точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $EBCD$  лежит на прямой  $AK$  то  $AB = AC$ .

3. Найдите все натуральные  $a, b, c$  такие, что

$$a + (b, c) = b + (c, a) = c + (a, b).$$

Здесь  $(x, y)$  — наибольший общий делитель чисел  $x$  и  $y$ .

4. Дано множество из  $n$  целых чисел. Пусть «прыжок» представляет собой операцию в которой будет выбрано любое  $k$  чисел из множества, и к каждому такому числу  $a$  из выбранных чисел можно прибавить  $b \cdot k$ , где  $b$  любое целое число (для каждого  $a$  выбирается свое  $b$ ). Докажите, что за 3 «прыжка» можно сделать все числа из множества нулями.

Решения и критерии  
оценивания  
второго (районного) этапа  
Республиканской олимпиады  
школьников по математике  
2022-2023 учебный год  
*9 класс*

Общие положения по проверке работ

1. Приведённые критерии оценивания являются приблизительными. Учащиеся (как и проверяющие), возможно, смогут найти и другие верные решения. Жюри имеет право вносить изменения в критерии, проголосовав за них коллегиально. Главное, чтобы все работы участников оценивались по одинаковым критериям.
2. Перед проверкой жюри следует внимательно изучить олимпиадные задания, их решения и критерии. Желательно прорешать задания самим для возможного поиска альтернативных решений.
3. По окончании проверки обязательно надо проводить разбор и апелляцию задач, притом разборы желательно делать до апелляции и при разборе рассказывать ученикам, за что снимались баллы, а за что добавлялись. Это значительно сократит число учеников желающих подать на апелляцию.
4. В целях более справедливой оценки желательно чтобы одну задачу проверял один человек (или, согласованно, одна группа). В конце, если позволяет время, то следует перепроверить горизонтально (один человек проверяет все задачи одного школьника).
5. Следует помнить, что олимпиадная работа – это не контрольная работа. При оценивании олимпиадных работ, в отличие от оценивания типовых заданий по математике, недопустимо снимать баллы за исправления в работе, за слишком длинное решение, или если решение школьника отличается от решения, приведенного в учебных пособиях.
6. Не следует слишком строго наказывать за технические ошибки или недостатки в решении: описки, легко устранимые арифметические ошибки, непринципиальные моменты в ходе решения, например участник до конца не упростил ответ, не совсем строгий порядок изложение или пропуск очевидных моментов, не влияющих в целом на ход решения. В зависимости от серьёзности ошибки или недостатка снимается не более 2 баллов, в некоторых ситуациях вообще снимать не следует.

7. Внимательно проверяйте насколько соответствует решение критериям проверки. В особенности, если решение ученика неполное и / или альтернативное официальному. Важно понять, насколько участник продвинулся по критериям, какие случаи идеи он предлагает и какие факты им получены или доказаны. В альтернативного решения желательно обсудить решения и критерии для этого решения коллегиально.
8. Однако текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен оцениваться в 0 баллов. Баллы за «старание участника» не выставляются, даже если участник исписал много страниц или построил «красивый» чертёж. Если участник «угадал» правильный ответ, не приводит никаких объяснений, как он его получил, то за это не следует давать баллов.
9. Часто на олимпиадах можно встретить так называемые «счётные решения», когда участник пытается решить задачу «в лоб», опираясь только на алгебраические операции, метод координат, векторный метод, теоремы косинусов, синусов, Чевы, Менелая и т. п., не применяя никакую идею, отличного от технического счёта. Обычно такие решения (если вообще возможно решить таким способом задачу) занимают много страниц текста. К таким «счётным» решениям по сложившейся многолетней традиции применяется следующая схема оценивания:
- если участник смог довести своё счётное решение до конца, то он получает полные **7 баллов**;
  - если участник не довёл своё «счётное» решение до конца (независимо насколько он продвинулся) и / или допустил вычислительную ошибку — **0 баллов**.
10. На математических олимпиадах преимущественно закрепились наилучшим образом зарекомендовавшая себя 7-балльная шкала. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице ниже. Таблица примерная, к каждой задаче следует подходить индивидуально.

### Примерные критерии оценивания задач

Баллы	Отметка	Правильность (ошибочность) решения
<b>7</b>	+	Полное верное решение.
<b>6-7</b>	$\dot{+}$	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
<b>5-6</b>	$\dot{+}$ или $\dot{-}$	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
<b>4</b>	$\pm$	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
<b>2-3</b>	$\mp$	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
<b>0-1</b>	$\dot{-}$	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
<b>0</b>	—	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
<b>0</b>	—	Решение отсутствует.

### Задача 9.1

*Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию из восьми человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в неё должен входить хотя бы один математик?*

**Ответ:** 450.

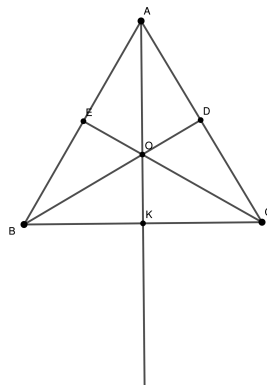
**Решение.** Алдымен 12 адамнан неше 8 адамнан тұратын комиссия жасай алатынымызды есептейік. Оның саны  $\binom{12}{8} = 495$ . Енді бірде-бір математик кірмейтін комиссиялар санын есептейік. Ол  $\binom{10}{8} = 45$ . Енді жалпы комиссиялар санынан бірде-бір математик кірмейтін комиссиялар санын алып тастасақ комиссияда кем дегенде бір математик болатын комиссиялар санын аламыз. Яғни  $495 - 45 = 450$ .

В комиссии либо один математик либо два. Пусть один. Тогда количество способов выбрать одного математика из двух равно  $\binom{2}{1} = 2$ , а количество способов выбрать 7 экономистов из 10 равно  $\binom{10}{7} = 120$ . Следовательно всего  $\binom{2}{1} \cdot \binom{10}{7} = 2 \cdot 120 = 240$  способов. Пусть теперь в комиссии два математика. Тогда количество способов выбрать двух математиков из двух равно  $\binom{2}{2} = 1$ , а количество способов выбрать 6 экономистов из 10 равно  $\binom{10}{6} = 210$ . Следовательно всего  $\binom{2}{2} \cdot \binom{10}{6} = 210$  способов. Тогда всего  $240 + 210 = 450$  способов.

### Задача 9.2

В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AK$ . На прямой  $AB$  и  $AC$  выбраны точки  $E, D$  ( $E \neq A, D \neq A$ ) соответственно. Оказалось, что точки  $E, D$  лежат по одну сторону от прямой  $BC$  и  $EB = BK, CD = CK$ . Докажите, что если точка пересечения диагоналей четырёхугольника  $EBCD$  лежит на прямой  $AK$  то  $AB = AC$ .

**Решение.**



$BC$  және  $CE$  түзулері  $O$  нүктесінде қиылыссын.  $AK$  - биссектриса болғандықтан  $\frac{AB}{BK} = \frac{AC}{CK} = \frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD}$  қатынастарын аламыз. Онда  $BC$  және  $ED$  параллель.  $AO$  түзуі  $BC$  және  $ED$  кесінділерінің орталары арқылы өтетінін байқайық (себебі  $\triangle BAC$ ,  $\triangle BOC$  үшбұрыштары сәйкесінше  $\triangle EAD$ ,  $\triangle DOE$  үшбұрыштарына ұқсас). Демек  $K$  нүктесі  $BC$  кесіндісінің ортасы болып табылады. Демек  $AB = AC$ .

Пусть  $BC$  и  $CE$  пересекаются в точке  $O$ . В силу того, что  $AK$ —биссектриса получим  $\frac{AB}{BK} = \frac{AC}{CK} = \frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD}$ . Тогда  $BC$  и  $ED$

параллельны. Заметим, что прямая  $AO$  проходит через середины отрезков  $BC$  и  $ED$  (т.к. треугольники  $\triangle BAC, \triangle BOC$  подобны треугольникам  $\triangle EAD, \triangle DOE$  соответственно). Значит точка  $K$  и есть середина  $BC$ . Следовательно  $AB = AC$ .

### Примерная схема оценивания

1. Доказано, что  $BC \parallel DE$  (2 балла).
2. Показано, что точки  $O, A$  и середины отрезков  $BC$  и  $ED$  лежат на одной прямой (4 балла).
3. Отсюда получено, что  $K$  середина отрезка  $BC$  (1 балл).

### Задача 9.3

Найдите все натуральные  $a, b, c$  такие, что

$$a + (b, c) = b + (c, a) = c + (a, b).$$

Здесь  $(x, y)$  – наибольший общий делитель чисел  $x$  и  $y$ .

**Ответ:**  $(a, b, c) = (dx, dx, d), (d, dx, dx), (dx, d, dx)$  где  $d, x$  любые натуральные числа.

**Решение.**

$(a, b, c) = d, (a/d, b/d) = x, (b/d, c/d) = y, (c/d, b/d) = z$  болсын. Бұдан біз  $a, b, c$  сандарын сәйкесінше  $dxzk, dxym, dyzn$  деп ала аламыз (бұл жерде  $(zk, ym) = (xm, zn) = (xk, yn) = 1$ ).

Берілген теңдеудің орнына қоямыз

$$dxzk + dy = dxym + dz = dyzn + dx \quad (1)$$

Барлығын  $d$ -ға бөліп тастаймыз.

$$xzk + y = xym + z = yzn + x \Rightarrow$$

$$z - y = x(ym - zk):x$$

. Дәл осылай  $x - z:y, y - x:z$  аламыз.

БОО  $x \geq y \geq z$  деп ала аламыз  $\Rightarrow x \geq y > y - z:x \Rightarrow y = z$ . Ал  $(y, z) = 1$  болғандықтан  $y = z = 1$  шығады.

(1) теңдікке, орынына апарып қоямыз

$$xk + 1 = xm + 1 = n + x \Rightarrow xk = xm \Rightarrow k = m = 1$$

$(k, m) = 1$  болғандықтан. (1) теңдіктен  $n = 1$  аламыз. Сонда  $(a, b, c) = (dx, dx, d)$  шешімдерін аламыз, бұл жерде  $d, x$  кез келген натурал сандар.

Пусть  $(a, b, c) = d, (a, b) = x, (b, c) = y, (c, a) = z$ . Тогда можно взять  $a, b, c$  как  $dxzk, dxym, dyzn$  соответственно (где  $(zk, ym) = (xm, zn) = (xk, yn) = 1$ ).

Поставим в наше уравнение и получим

$$dxzk + dy = dxym + dz = dyzn + dx(1)$$

Сократим всё на  $d$

$$xzk + y = xym + z = yzn + x \Rightarrow$$

$$z - y = x(ym - zk):x.$$

Аналогично получим, что  $x - z:y, y - x:z$ .

Без ограничения общности будем считать, что  $x \geq y \geq z \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \geq y > y - z:x \Rightarrow y = z.$$

А так как  $(y, z) = 1$  то  $y = z = 1$ .

Поставим в (1) и получим

$$xk + 1 = xm + 1 = n + x \Rightarrow xk = xm \Rightarrow k = m = 1$$

так как  $(k, m) = 1$ . Из (1) получим, что  $n = 1$ . Тогда  $(a, b, c) = (dx, dx, d)$  где  $d, x$  любые натуральные числа.

### Примерная схема оценивания

1. Правильно представлены  $(a, b, c)$  через их ноды (**1 балл**).
2. Доказано, что  $y = z = 1$  (**3 балл**).
3. Доказано, что  $k = m = n = 1$  (**3 балла**).
4. Правильный ответ без обоснования (**0 баллов**).

#### Задача 9.4

Дано множество из  $n$  целых чисел. Пусть «прыжок» представляет собой операцию в которой будет выбрано любое  $k$  чисел из множества, и к каждому такому числу  $a$  из выбранных чисел можно прибавить  $b \cdot k$ , где  $b$  любое целое число (для каждого  $a$  выбирается свое  $b$ ). Докажите, что за 3 «прыжка» можно сделать все числа из множества нулями.

Алдымен  $n - 1$  сан таңдап, әр  $a$  санына  $a \cdot (n - 1)$  санын қосамызда  $a \cdot n$  санын аламыз, яғни  $n$ -ге бөлінетін сан. Бұл *бірінші секіріс*. *Екінші секірісте* соңғы қалған санды таңдап, қосынды  $n$ -ге бөлінетіндей санды қосамыз. Және *соңғы секірісте* барлық санды таңдаймыз. Әр санымыз  $n$ -ге бөлінетін байқайық, демек, оның түрі  $a \cdot n$  және осындай санға  $-a$  санын таңдап  $-a \cdot n$  санын қосамыз. Демек барлық сан нөлге айналады.

Сначала выберем  $n - 1$  чисел и для каждого числа  $a$  прибавляем  $a \cdot (n - 1)$  и получаем число равное  $a \cdot n$ , то есть делящаяся на  $n$ . Это *первый прыжок*. *Вторым прыжком* выберем последнее оставшееся число и прибавляем число так, чтобы в сумме получилось число делящаяся на  $n$ . И *последним прыжком* выберем все числа. Заметим, что каждое число делится на  $n$ , следовательно, имеет вид  $a \cdot n$ , и такому числу выберем число  $-a$  и прибавляем число  $-a \cdot n$ . Следовательно, все числа становятся нулями.